2.7) a) Verifico que es LI con elim. Gaussiana.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \xrightarrow{\cos\theta F1 - F2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \quad SCD \to LI$$

Como tiene $\dim = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ y es LI, genera $\mathbb{R}^2$ y es base de $\mathbb{R}^2$.

~~b) $(x1, x2) = (\phi_1 + \phi_2 \cos\theta,$~~

b) $\underbrace{(x_1, x_2)}_{v} = \phi_1 . [1 \ \ 0]^T + \phi_2 . [\cos\theta \ \ \operatorname{sen}\theta]^T \to$

$\to (x_1, x_2) = (\phi_1 + \phi_2 \cos\theta,\ \phi_2 \operatorname{sen}\theta) \to$

$$\to \begin{cases} x_1 = \phi_1 + \phi_2 \cos\theta \quad \mathrm{I} \\ x_2 = \phi_2 \operatorname{sen}\theta \quad \mathrm{II} \end{cases}$$

de II $\to$ $\boxed{\phi_2 = \dfrac{x_2}{\operatorname{sen}\theta}}$

en I $\to$ $\boxed{\phi_1 = x_1 - \dfrac{x_2}{\operatorname{sen}\theta} . \cos\theta}$

Ahora demuestro que $\phi_1(v)$ y $\phi_2(v)$ son func. lineales.

Para $\phi_1(v)$:

1) Tomo $v_1=(x_1,x_2)$ y $v_2=(x_3,x_4)$

$$\phi_1(v_1)= x_1-\frac{x_2\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \quad , \quad \phi_1(v_2)= x_3-\frac{x_4\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\phi_1(v_1+v_2)=(x_1+x_3)-\frac{(x_2+x_4)\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\left(x_1-\frac{x_2\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)+\left(x_3-\frac{x_4\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow = \phi_1(v_1)+\phi_1(v_2) \checkmark$$

2) Tomo $v_1=(x_1,x_2)$: $\phi_1(v_1)=x_1-\frac{x_2\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

$$\lambda\in K, \ \phi_1(\lambda v_1)=(\lambda x_1)-\frac{(\lambda x_2)\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\lambda.\left(x_1-\frac{x_2\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)=\lambda.\phi_1(v_1) \checkmark$$

Es f. lineal. ✓

Para $\phi_2(v)$:

1) Tomo $v_1=(x_1,x_2)$ y $v_2=(x_3,x_4)$

$$\phi_2(v_1)=\frac{x_2}{\operatorname{sen}\theta} \quad , \quad \phi_2(v_2)=\frac{x_4}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\phi(v_1+v_2)=\frac{(x_2+x_4)}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{x_2}{\operatorname{sen}\theta}+\frac{x_4}{\operatorname{sen}\theta}=\phi_2(v_1)+\phi_2(v_2) \checkmark$$

2) $\lambda\in K$, $v_1=(x_1,x_2)$

$$\phi_2(\lambda v_1)=\frac{(\lambda x_2)}{\operatorname{sen}\theta}=\lambda.\left(\frac{x_2}{\operatorname{sen}\theta}\right)=\lambda.\phi_2(v_1) \checkmark$$

Es f. lineal. ✓

c) $\Pi(v) = \phi_1(v)[1 \quad 0]^T$

Es una TL en sí mismo porque va de un dominio en $\mathbb{R}^2$ a ~~un~~ un codominio también en $\mathbb{R}^2$, es decir:

Π es una TL tal que $\Pi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

d) $\pi(v) = \phi_1(v)[1 \quad 0]^T = \left(x_1 - \frac{x_2 \cos\theta}{\sin\theta}\right) \cdot [1 \quad 0]^T \rightarrow$

$\rightarrow \pi(v) = \left[x_1 - \frac{x_2 \cos\theta}{\sin\theta} \quad 0\right]^T$

Busco $\mathrm{Im}\,\pi$

$\pi(1,0) = [1 \quad 0]^T$, $\pi(0,1) = \left[-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad 0\right]^T$

Por lo tanto un generador de la imagen de π es:

$\mathrm{Im}\,\pi = \left\langle [1 \quad 0]^T, \left[-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad 0\right] \right\rangle$, pero como estos dos componentes claramente son LD, una base de la imagen es:

$B\,\mathrm{Im}\,\pi = \{[1 \quad 0]^T\}$, y lo generado por $[1 \quad 0]$, efectivamente es el eje de abscisas.

(*) en el c) demuestro también que π es TL:

(1) Tomo $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$

$$\pi(v_1+v_2) = \begin{bmatrix} (x_1+x_2) - \frac{(y_1+y_2)\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} & 0 \end{bmatrix}^T \rightarrow$$

$$\rightarrow = \begin{bmatrix} x_1 - \frac{y_1\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} x_2 - \frac{y_2\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} & 0 \end{bmatrix}^T = \pi(v_1) + \pi(v_2) \checkmark$$

(2) $\lambda \in K$

$$\pi(\lambda v) = \begin{bmatrix} (\lambda x_1) - \frac{(\lambda y_1)\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} & 0 \end{bmatrix}^T = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 - \frac{y_1\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} & 0 \end{bmatrix}^T = \lambda \cdot \pi(v) \checkmark$$

es TL $\checkmark$

e) Quiero los v tq $\Pi(v) = [x_0 \quad 0]^T$

$$v = v_{PARTICULAR} + \underbrace{v_B}_{\text{Todos los del núcleo.}}$$

$$\to v = \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Particular}} + v_B.$$

ya que $\Pi\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Busco $Nu(\Pi)$

$$\to Nu(\Pi) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : \left[x_1 - \frac{x_2 \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \quad 0 \right]^T = [0 \quad 0]^T \right\}$$

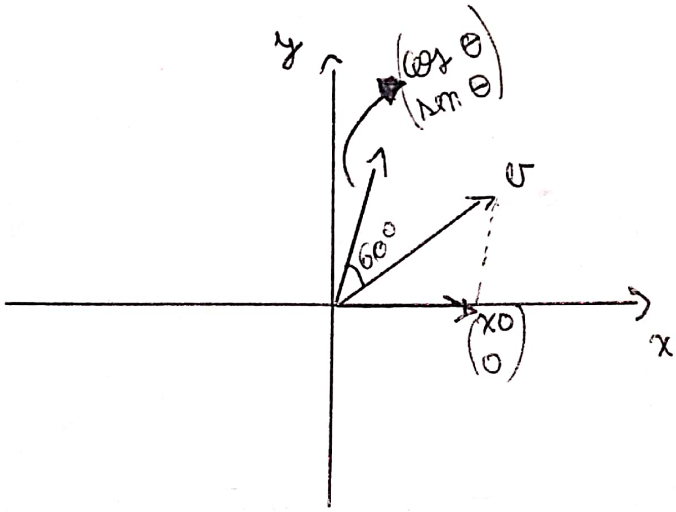
$$\to \frac{x_1 - x_2\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 0 \to -x_2\cos\theta = -x_1\operatorname{sen}\theta \to x_1 = \frac{x_2\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\text{Sol.} \to (x_1, x_2) = \left(x_2 \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} ; x_2 \right) = x_2 \cdot \left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} ; 1 \right)$$

Por lo tanto $B_{\ker}(\pi) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} ; 1 \end{pmatrix} \right\}$

Entonces → $v = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Todos los v tq $\pi(v) = [x_0 \;\; 0]^T$.



g) Pruebo que $\Sigma(v) = \left(x_1 - \frac{x_2}{\operatorname{sen}\theta} \cos\theta \right) \cdot [1 \;\; 0]^T - \frac{x_2}{\operatorname{sen}\theta} [\cos\theta \;\; \operatorname{sen}\theta]^T$

es TL:

Reescribo Σ:

$\Sigma(v) = \left[x_1 - \frac{x_2}{\operatorname{sen}\theta} \cos\theta - \frac{x_2}{\operatorname{sen}\theta} \cos\theta \quad -\frac{x_2}{\cancel{\operatorname{sen}\theta}} \cancel{\operatorname{sen}\theta} \right]^T$ →

→ $\Sigma(v) = \left[x_1 - 2 \frac{x_2 \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \quad -x_2 \right]^T$

① Tomo $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$

$$\Sigma(v_1 + v_2) = \left[(x_1 + x_2) - 2 \cdot \frac{(y_1 + y_2)\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \quad -(y_1 + y_2) \right]^T \rightarrow$$

$$\rightarrow = \left[x_1 - \frac{2y_1\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \quad -y_1 \right]^T + \left[x_2 - \frac{2y_2\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \quad -y_2 \right]^T = \Sigma(v_1) + \Sigma(v_2) \checkmark$$

② Tomo $v_1 = (x_1, y_1)$, $\lambda \in k$

$$\rightarrow \Sigma(\lambda v_1) = \left[(\lambda x_1) - 2 \cdot \frac{(\lambda y_1)\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \quad -(\lambda y_1) \right]^T \longrightarrow$$

$$\rightarrow = \lambda \cdot \left[x_1 - \frac{2y_1\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \quad -y_1 \right]^T = \lambda \cdot \Sigma(v_1) \checkmark$$

EA TL.

La transform. es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

- P/que sea inyectiva $\rightarrow Nu(\Sigma) = \{0\}$

Busco $Nu(\Sigma)$:

$$Nu(\Sigma) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \left[x_1 - 2x_2 \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \quad -x_2 \right]^T = [0 \quad 0]^T \right\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 0 \rightarrow \boxed{x_1 = 0} \\ -x_2 = 0 \rightarrow \boxed{x_2 = 0} \end{cases}$$

Por lo tanto, efectivamente $Nu(\Sigma) = \{0\}$ y es inyectiva

- Para saber si es sobreyectiva ($Im(\Sigma) = \mathbb{R}^2$), sabemos que:

$$Dim(Im(\Sigma)) = Dim(\mathbb{R}^2) - Dim(Nu(\Sigma))$$

En este caso:

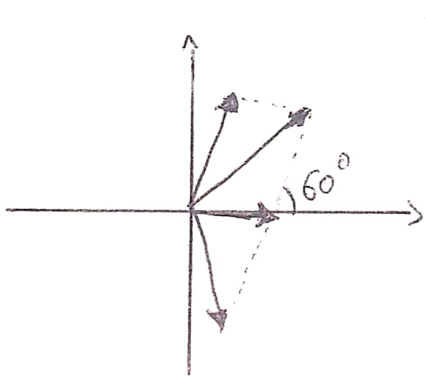
$$Dim(Im(\Sigma)) = 2 - 0 \rightarrow Dim(Im(\Sigma)) = 2 \rightarrow \underbrace{Im(\Sigma) = \mathbb{R}^2}$$

La imagen está incluida en $\mathbb{R}^2$ y tiene Dim $= 2$.

Por lo tanto $\Sigma(v)$ también es sobreyectiva, por lo tanto, es biyectiva y como $\Sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se dice que es una TL biyectiva de $\mathbb{R}^2$ en sí mismo.

b) $\Sigma(1,0) = [1 \quad 0]^T$, $\Sigma(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = [-\cos\theta \quad -\operatorname{sen}\theta]^T$

a



Σ, sería la reflexión respecto al eje de abscisas según la dirección θ.

i) $\Pi^2 = \Pi$

$\to \Pi(\Pi(v)) = \Pi(v)$

siendo $v = \phi_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \phi_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$

$\to \Pi(v) = \phi_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\to \Pi\left(\phi_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \Pi\left(\phi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}\right) = \phi_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\to \Pi^2(v) = \phi_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \Pi(v), \ \forall v.$

$\Sigma^2(v) = I_{\mathbb{R}^2}$, $v = \phi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \phi_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$

$\to \Sigma(v) = \phi_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \phi_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$

$\to \Sigma^2(v) = \Sigma(\Sigma(v)) = \phi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \phi_2 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = v = I_{\mathbb{R}^2}, \ \forall v \in \mathbb{R}^2.$